**CONSERVATOIRE NATIONAL
DES ARTS ET METIERS**

LA LOGIQUE INTUITIONNISTE

Franck WYNEN
**Unité de valeur
du cycle C
Session 2000/2001**

Sommaire

La logique intuitionniste

1 Introduction

Lorsque pour la première fois on entend parler de logique intuitionniste, on découvre que la logique enseignée dans nos écoles n'est pas la seule existante. Confinée dans un coin des mathématiques et de la philosophie, elle apparaît comme une hérésie cachée aux yeux du monde dans le soucis de nous préserver d'une autre façon de raisonner. Cette attitude protectrice d'une orthodoxie scientifique qui ne nous dévoile jamais ses propres ambiguïtés alors qu'elles sont là, prêtes à surgir entre deux démonstrations, n'est peut être qu'une attitude auto-protectrice.

Pourtant, c'est avec un sens critique que nous devons observer nos connaissances. Cette remise en question, présente dans la démarche intuitionniste, est qualifiée de révisionnisme par une grande partie de la communauté mathématique.

Dans les paragraphes qui vont suivre, je m'efforcerai de trouver les raisons qui ont poussé de grands mathématiciens à penser autrement et de faire valoir leurs points de vue.

Après avoir mené un questionnement sur le sujet qui nous intéresse ici, je remonterai le temps afin d'y chercher un contexte propice aux divergences d'opinion. Je situerai le mouvement intuitionniste par rapport aux autres en explicitant leurs différences.

Lors d'une discussion autour des thèmes philosophiques et mathématiques je tenterai, en me plaçant du point de vue intuitionniste, de rendre compte des tenants et des aboutissements de cette forme particulière de raisonnement.

2 Problématique

Pour comprendre ce qu'est la logique intuitionniste il faut tout d'abord s'interroger sur les concepts de logique et d'intuition. On utilise ces termes autant dans la philosophie que dans les mathématiques. Une première approche consiste à s'interroger sur les liens entre ces deux disciplines.

La philosophie se définit selon une approche encyclopédique[1] comme un domaine d'activité de la pensée qui s'assigne pour fin une réflexion sur les êtres et les choses de l'Univers, de l'histoire, etc. C'est l'ensemble des recherches et des réflexions menées dans ces domaines.

Alors que sous l'appellation de mathématique, on différencie généralement deux démarches fort différentes. D'une part, une activité technique, la plus ancienne, où prime l'intérêt pratique, au service de la survie du groupe et d'autre part, une activité scientifique, plus récente, création intellectuelle qui, dès les Grecs, place les mathématiques au même niveau que la philosophie.

L'histoire de ces deux disciplines nous apprend ainsi qu'au fil des siècles elles ont tissé des liens étroits. Il serait intéressant de savoir si on peut retrouver une même signification pour les mots logique et intuition dans le domaine des mathématiques et de la philosophie.

La logique se définit[2] comme une science du raisonnement en lui-même, abstraction faite de la matière à laquelle il s'applique et de tout processus psychologique. Le raisonnement est ici érigé en science alors que la logique mathématique est une théorie scientifique des raisonnements, excluant les processus psychologiques mis en œuvre et qui se divise en calcul des propositions et calcul des prédicats.

Ces deux aspects de la logique semblent proche et exhibent comme point commun le raisonnement. Il semble cependant, aux vues de leurs définitions respectives que la logique mathématique soit une extension de la logique au sens philosophique.

Cela ne répond pas pour autant à la question de savoir ce qu'est un raisonnement logique et s'il est possible qu'il y ait plusieurs façons de raisonner.

---

[1] Larousse multimédia encyclopédique
[2] ibid. 1

Néanmoins, si on considère que la logique intuitionniste est une forme de logique particulière alors il doit exister une façon intuitionniste de raisonner.

Il est donc important dés à présent de s'interroger sur ce qu'est l'intuitionnisme.

L'intuition au sens philosophique du terme se définit[3] comme la saisie immédiate de la vérité sans l'aide du raisonnement et l'intuitionnisme mathématique est une doctrine définie par les logiciens Néerlandais Heyting et Brouwer et selon laquelle on ne doit considérer en mathématique que les entités que l'on peut construire par l'intuition. On peut exprimer cette doctrine avec un exemple simple:

Toute forme de vie sur terre est composée de carbone car notre expérience et notre niveau de connaissance permettent de l'affirmer. Nous en avons l'intuition. Toutefois, en aucun cas, nous ne pouvons généraliser cette propriété à toute forme de vie même extraterrestre car nous n'en avons aucune certitude.

Nous verrons plus loin en détail que ce principe s'applique aussi aux objets mathématiques. On peut d'ores et déjà l'exprimer au travers des ensembles d'objets non dénombrables qui partagent des propriétés communes mais pour lesquels toute hypothèse faite à priori sur l'un de leurs éléments n'est pas intuitive.

Toutefois n'y a t'il pas de contre sens quand on dit que la logique est la science du raisonnement alors que l'intuition se défend d'y avoir recours ? Que renferme réellement le terme de logique intuitionniste ?

3 Présentation historique

Pour comprendre la logique intuitionniste, il faut d'abord s'interroger sur les fondements et la formalisation des mathématiques qui ont débuté au XIX[ème] siècle mais dont les fondations reposaient sur des principes élaborés dans l'antiquité.

Cette présentation historique sans réel fil directeur n'est pas une histoire des mathématiques et de la logique. Elle présente seulement les éléments de l'évolution de ces disciplines liés de prés ou de loin à la logique intuitionniste et qui seront développés dans les chapitres suivant. Il faut les voir comme les briques qui serviront plus tard à construire l'édifice. Dans un premier temps, je peux simplement dire qu'elle retrace l'évolution de la représentation et de la signification des objets mathématiques au travers des siècles et parallèlement celle du rapprochement de la logique et des mathématiques.

3.1 Prémisses

Comme énoncé précédemment, les travaux sur les mathématiques, réalisés depuis l'antiquité, permettent de mieux comprendre la logique intuitionniste. Cette partie, de Platon à la théorie des ensembles, apporte les bases nécessaires à la compréhension de notre sujet.

3.1.1 Platon

La question de la nature des objets mathématiques avait déjà été posée par Platon (Athènes v. 427 – id. 348-347 av J-C). Sa doctrine des idées considère ceux-ci comme extérieurs et préexistants à l'homme. Les mathématiques sont longtemps apparues comme la science d'une réalité déjà là, structure véritable, bien qu'indirectement accessible, du monde physique. Confinés dans un monde différent de celui des objets de la nature, les objets mathématiques ont un caractère divin qui leur interdit toute représentation du monde réel.

3.1.2 Aristote

En ce basant sur les travaux de prédécesseurs, Aristote (Stagire, Macédoine, 384 – Chalcis, Eubée, 322 av. J-C) propose les premiers axiomes de la logique dite classique.

- Principe d'identité : « Une variable ne peut pas à la fois être et ne pas être. On ne peut avoir à la fois A et non-A ».

[3] ibid. 1

- Principe de contradiction ou de non-contradiction : « Une variable ou une proposition ne peut pas être et ne pas être vraie. Ou elle est vraie ou elle est fausse ».
- Principe du tiers exclu : « De deux propositions contradictoires, si l'une est vraie l'autre est fausse et vice versa ».

Ces principes ont été complétés au fil du temps mais c'est celui du tiers exclu qui sera à l'origine du mouvement intuitionniste.

D'autre part, l'œuvre d'Aristote présente elle aussi une distinction entre monde sensible (soumis au devenir et livré pour partie au hasard) et monde intelligible (constitué d'essences éternelles). En effet, les mathématiques traitent d'entités abstraites (points, lignes, surfaces) alors que la physique traite des choses naturelles. Cette distinction interdira, jusqu'au XVI^{ème} siècle et les travaux de Galilée, le recours aux mathématiques dans l'étude de la nature.

3.1.3 Galilée

En effet, à la Renaissance s'opère un changement décisif. Ainsi, Galilée (Pise 1564 – Arcetri 1642) postule que la nature est écrite en langage mathématique. Le premier, il introduit l'usage des mathématiques pour l'explication des lois physiques et marque ainsi une rupture avec la physique quantitative d'Aristote.

Cette prise de position a pour effet de rapprocher le monde réel de celui des mathématiques. Toutefois, cette prise de position, fondamentale pour l'avènement de la science moderne, ne résout pas la question du type de l'existence des objets mathématiques. Jusqu'à aujourd'hui, deux communautés s'affrontent toujours, les uns leur attribuent une réalité indépendante de la connaissance que nous en avons, les autres les réduisent à l'état de signes dont le sens se limite aux règles formelles de leur emploi.

3.1.4 Leibniz

Jusqu'au XVII^{ème} siècle, les mathématiques s'énoncent encore dans le langage naturel. L'imprécision de cette méthode et les ambiguïtés liées à l'interprétation d'un langage inadapté aux mathématiques, emmène Leibniz (Leipzig 1646 – Hanovre 1716) à chercher un langage universel pour la logique symbolique. Bien qu'il ait échoué dans sa tâche, il fut à l'origine d'une recherche de formalisation des mathématiques. Il écrivait à ce propos, en 1667, au Père Berthet[4]:

Je tiens pour assuré qu'on ne saurait presque obliger davantage le genre humain qu'en établissant une caractéristique telle que je la conçois. Car elle donnerait une écriture ou, si vous voulez, une langue universelle qui s'entendrait de tous les peuples. Cette langue s'apprendrait tout entière (au moins pour le plus nécessaire) en peu de jours et ne se saurait oublier pourvu qu'on en retint quelque peu de chose. Mais le principal serait qu'elle nous donnerait filum meditandi, c'est à dire une méthode grossière et sensible, mais assurée de découvrir des vérités et résoudre des questions ex datis (...) et comme l'esprit se perd et se confond lorsqu'il y a un grand nombre de circonstances à examiner ou des conséquences à poursuivre (...), on se délivrerait par ce moyen des inquiétudes qui agitent l'esprit çà et là et qui le font flotter entre la crainte et l'espérance, en sorte que souvent, au bout de la délibération, on est aussi avancé ou moins qu'auparavant.

3.1.5 Kant

Pendant plusieurs siècles, en fait depuis la Grèce antique, la logique n'était plus un sujet de recherche. Cette discipline semblait ne pas avoir d'intérêts aux yeux des scientifiques et restait du domaine de la philosophie. Kant, un philosophe allemand (Königsberg 1724 - id. 1804) disait même que depuis Aristote la logique formelle « n'a pas pu faire un seul pas en avant et qu'ainsi, elle semble close et achevée ».

3.1.6 Boole et De Morgan

Pourtant, quelques décennies plus tard, Boole (Lincoln 1815 – Ballintemple, prés de Cork, 1864) au travers de deux ouvrages fondamentaux[5], s'est efforcé parmi les premiers de rapprocher les mathématiques et la logique en étudiant cette dernière. Ses travaux ont en outre porté sur une

---

[4] Leibniz, *Oeuvres choisies*, Ed. Garnier

[5] *L'analyse mathématique de la logique* (1847) et *Recherche sur les lois de la pensée* (1854)

première tentative de regroupement des objets mathématiques en classes. On lui doit l'algèbre (ou treillis) qui porte son nom. L'algèbre de Boole[6] préfigure les travaux sur la théorie des ensembles et peut être considérée comme un cas particulier de l'algèbre des parties d'un ensemble (muni de la réunion et de l'intersection).

Un des ses contemporains, De Morgan (Madurai, 1806 – Londres 1871) a contribué lui aussi, à la renaissance de la logique. Dans son ouvrage le plus connu[7], il considère la logique d'un point de vue algébrique. On utilise encore de nos jours deux propriétés[8] qui portent son nom.

3.1.7 Dedekind et Cantor

A partir des travaux des premiers mathématiciens-logiciens va progressivement s'établir la théorie des ensembles. Dedekind (Brunswick 1831 – id. 1916) d'abord, a jeté les premières bases de cette théorie et a écrit un important mémoire sur les fondements de mathématiques[9].

La théorie des ensembles de Cantor (Saint-Pétersbourg 1845 – Halle 1918) dont il est le véritable instigateur en 1874, s'appui sur les travaux de Boole et de Dedekind. En effet, les aspect logiques de sa théorie sont très liés à la logique du tiers exclu (un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble). Il va ainsi révolutionner le monde des mathématiques.

Il crée un langage simple, concis, universel, qui permet de formaliser et d'exprimer la pensée mathématique. Les objets, regroupés en fonction de caractéristiques communes ne sont plus manipulés individuellement mais plus globalement au niveau de l'ensemble qui les contient.

Cette généralisation offre un niveau d'abstraction inégalé jusqu'à présent. Malheureusement, de nombreux paradoxes inhérents à cette théorie vont faire naître un bouleversement dans les fondements des mathématiques.

3.2 La division

La partie précédente a jeté les bases d'une discorde dans la communauté scientifique. Tout en s'accordant sur le rôle important de la logique et de la nécessaire reconstruction des mathématiques, dés la fin du XIX[ème] siècle, celle-ci se divise et on voit apparaître trois grands mouvements.

3.2.1 Le logicisme

Professeur de mathématiques à Iéna, Frege (Wismar 1848 - Bad Kleinen, Mecklembourg, 1925) qui adhère aux idées de Cantor développe le langage formalisé[10]. Concernant la logique, il est le premier à avoir présenté une théorie cohérente du calcul des prédicats et du calcul des propositions sur la base des travaux de Boole.

Conscient des difficultés et des premières contradictions de la formalisation de la pensée usant du seul tiers exclu, il s'attaque aux fondements des mathématiques[11] en tentant de reconstruire toute l'arithmétique sur la seule logique. Ses travaux furent remarqués par l'anglais Russel avec lequel

---

[6] Un ensemble E possède une structure d'algèbre de Boole s'il est muni de deux lois de composition interne associatives et commutatives notées + et * :

- Les lois + et * sont distributives l'une par rapport à l'autre et admettent un élément neutre (0 et 1 respectivement);
- Tout élément de E est idempotent pour chaque loi : $x + x = x$ et $x \bullet x = x$
- Tout élément x de E possède un unique élément, dit complémenté de x, noté x généralement, vérifiant la loi du tiers exclu : $x + \bar{x} = 1$ et le principe de contradiction $x * \bar{x} = 0$.
- Dans cette algèbre, on peut écrire : $\bar{x} = 1 - x$.
- L'algèbre (E, ∪, ∩) des parties d'un ensemble est une algèbre de Boole, la réunion (∪) est l'addition (+) et l'intersection (∩) est la multiplication (*). 1 est ici E et 0 est la partie vide ∅ et $\bar{x}$ devient la partie complémentaire.

[7] Logique formelle ou calcul de l'inférence nécessaire ou probable (1847)

[8] $\overline{x * y} = \bar{x} + \bar{y}$ et $\overline{x + y} = \bar{x} * \bar{y}$

[9] Ce que sont et ce que doivent être les nombres (1887)

[10] *Calcul des propositions et théorie de la quantification* : 1879, *Begriffschrift*

[11] *Les fondements de l'arithmétique* : 1884, *Grundlagen der Arithmetik*

il a entretenu une correspondance. Il est à la source d'une plus grande rigueur dans le langage des ensembles (développé par Cantor) et du raisonnement déductif. Il est également à l'origine de la sémiologie[12].

Les travaux de Peano (Cuneo 1858 – Turin 1932), quant à eux, portent sur la logique mathématique, la théorie des ensembles et l'axiomatisation de l'ensemble des entiers naturels.

On lui doit la création d'un système de notations[13] susceptibles d'énoncer et de démontrer les propositions mathématiques en utilisant un minimum de signes compatibles avec le raisonnement déductif reposant sur des notions premières acceptées (axiomes).

Dans la suite des travaux de Frege et de Peano concernant la logique mathématique et aux vues des contradictions inhérentes à la théorie des ensembles de Cantor, Russell (Trelleck, pays de Galles, 1872 – Penrhydeudraeth, pays de Galles, 1970) expose dans ses deux ouvrages [14] écrit en collaboration avec Whitehead (Ramsgate, Kent, 1861 – Cambridge, Massachusetts, 1947), les problèmes liés à la distinction entre *classe* d'objets et ensemble[15].

Pour Russell et Whitehead, la solution à ces phénomènes contradictoires est l'axiomatisation des mathématiques. La logique est reconstruite sur des postulats et doit pouvoir permettre la reconstruction de toute les mathématiques : C'est ce que l'on appela le logicisme.

Les logicistes se satisfont d'une définition cohérente d'un objet mathématique ou d'une démonstration prouvant son existence. Exhiber l'objet n'est pas l'objet de leurs discours...

3.2.2 Le formalisme

Professeur à l'université de Königsberg, sa ville natale, puis à Göttingen. Hilbert (Königsberg 1862 – Göttingen, 1943) rencontrera et se liera d'amitié avec les plus grands mathématiciens de l'époque dont : Cantor, Kronecker et Poincaré. Partisan d'un formalisme rigoureux, Hilbert travaille à l'axiomatisation de la géométrie euclidienne[16] et dans la théorie des nombres.

Sa volonté fut ainsi de reconstruire les mathématiques sur des fondements axiomatiques, indépendamment de la logique ensembliste. Il réussit la reconstruction de la géométrie euclidienne : cinq groupes de quatre axiomes, dont quinze équivalent à ceux d'Euclide. On y trouve, en particulier, l'axiome d'Archimède pour les segments et l'axiome de Pasch, non explicités par Euclide. Il est alors désormais clair que la géométrie euclidienne avec ou sans le célèbre 5ème postulat est *consistante* (elle n'engendre pas de contradiction). Les problèmes de l'*arithmétique*, de la *géométrie algébrique* et de la théorie des ensembles sont beaucoup plus difficiles à reconstruire axiomatiquement. Ils firent l'objet des problèmes ouverts cités au congrès de 1900.

3.2.3 L'intuitionnisme

Le troisième courant de pensée, né de cette crise des fondements au début du XXème siècle, est issu des travaux de Kronecker (Liegnitz, 1823 – Berlin 1891) qui s'opposa aux théories de Cantor et de Dedekind. Il considérait que *Dieu a créé les nombres entiers, le reste est l'œuvre de l'homme.* En tant qu'algébriste il était convaincu de la prééminence des entiers naturels dans l'architecture mathématique.

Poincaré (Nancy 1854 – Paris 1912) ainsi que Borel (Saint-Affrique, 1871 – Paris, 1956) se sont eux aussi positionné en faveur du *constructivisme (*dit aussi *intuitionnisme)* en critiquant les travaux de Russel, Peano et Hilbert.

Enfin, Brouwer (Overschie, 1881 – Blaricum, Hollande-Septentrionale, 1966) est considéré comme le chef de file du mouvement intuitionniste. Ce mathématicien et logicien s'opposa aux travaux de Whitehead et Russel en affirmant que les mathématiques ne pouvaient pas être déduites de la

---

[12] Sens et dénotation 1892

[13] Les symboles ensemblistes : $\in$, $\cap$, $\cup$, $\subset$, le signe $\supset$ qui signifie l'implication logique, le symbole $\exists$ *existentiel* : « il existe au moins un... » et $A \subset B$ exprime que tout élément de A est aussi un élément de B par exemple : $N \subset Z \subset R$

[14] Principes des mathématiques *The Principles of Mathematics* 1903 puis *Principia mathematica* 1910

[15] Dans la théorie élémentaire (dite parfois "naïve") des ensembles, écrire $x \in x$ n'a pas de "sens" car un ensemble doit être distingué des éléments qui le constituent. Ainsi, il faut écrire $x \in \{x\}$

[16] *Grundlagen der Geometrie,* 1899 : fondements de la géométrie

logique « […] et d'ailleurs la logique, loin de précéder les mathématiques, en est issue ; mieux encore elle n'est nullement un caractère intrinsèque des mathématiques, et ses principes, lois ou règles, ne décrivent que les régularités observées non pas dans les mathématiques, mais dans le langage qui les exprime.[17] »

Il était soucieux de définir ou de démontrer, qu'il existe un algorithme permettant d'exhiber l'objet mathématique étudié. Sa preuve abstraite d'existence ne suffit pas. L'axiome du choix[18] est ici refusé et le principe du *tiers exclu* est remis en cause[19].

Le locicien et mathématicien américain d'origine autrichienne Gödel (Brünn, 1906 – Princeton, 1978) a définit deux notions fondamentales de la logique moderne : L'incomplétude[20] et l'indécidabilité[21].

Ses travaux vont par la même occasion définitivement ruiner les espérances de Hilbert concernant le formalisme qu'il voyait comme une réponse aux contradictions rencontrées depuis la création de la théorie des ensembles de Cantor, et montre les limites du raisonnement logique et l'impossibilité de construire l'arithmétique sur le seul support logique comme le voulaient les partisans du *logicisme* que furent Frege et Russell.

En 1931 Gödel redéfinit le concept d'algorithme en introduisant les notions de fonctions (ou relations) *récursives, calculables*[22] et d'ensembles *récursivement énumérables*[23]. Dans un contexte constructiviste, cette nouvelle vision permet d'exhiber, sans ambiguïté, des objets mathématiques en un nombre fini d'étapes et conduit au concept d'ensembles et de théories *axiomatisables* et *décidables*.

Il répond ainsi par la négative à deux des questions qu'Hilbert avait énoncées lors du Congrès international de mathématiques à Paris en 1900 :

1a - Peut-on prouver l'hypothèse du continu de Cantor ? en 1940.

2 - Peut-on prouver la consistance de l'arithmétique ? en 1931.

La logique usuelle s'avérant "insuffisante" pour les mathématiques en général, on se plaça alors à un niveau supérieur : on parla de *métalogique* et de *métamathématique*. Il fallait redéfinir le concept de démonstration. Cette notion sera abordée au chapitre suivant.

En 1940, Ackermann prouvait par ce biais la consistance de l'arithmétique alors que quelques années auparavant, une démonstration semblable avait été apportée par Gentzen[24] (Greifswald, 1909 – Prague, 1945) étudiant de Hilbert (comme Ackermann) et dont les travaux portaient également sur la métamathématique.

Robinson travailla aussi sur la *métamathématique* et la *théorie des modèles* : étude des langages mathématiques et des modèles construits au moyen de ces langages.

---

[17] Largeault J. in *L'Intuitionisme* ; Que sais-je ? numéro 2684, Presses Universitaires de France, 1992.
[18] Axiome (fondamental) de la théorie des ensembles, qui affirme l'existence d'une fonction associant à tout sous-ensemble non vide d'un ensemble quelconque un élément et un seul appartenant à ce sous-ensemble. (L'axiome du choix a été énoncé par Zermelo en 1904.)
[19] Principalement dans les domaines relevant de l'existence d'un élément dans des ensembles infinis non dénombrables.
[20] Théorème d'incomplétude : Gödel prouva que toute théorie formelle T (fondée sur une axiomatique) consistante et susceptible de formaliser, en son sein, l'arithmétique (théorie des nombres) est incomplète : il existe au moins une proposition de l'arithmétique indémontrable dans T (on ne pourra prouver ni qu'elle est vraie ni qu'elle est fausse).
[21] *Sur les propositions indécidables des « Principia mathematica »*, 1931.
[22] Une fonction f de variable entière n est calculable s'il existe un algorithme permettant de calculer f(n) en un nombre fini d'étapes.
[23] S'il existe une fonction f récursive dont l'image est cet ensemble.
[24] *Recherche sur la déduction logique*, 1935

4 La logique intuitionniste

Après ce tour d'horizon historique, il me faut maintenant en préciser le fil conducteur. En effet, sans autres explications, cette énumération de personnages et de dates ne pourraient pas rendre compte de la logique intuitionniste. Les paragraphes qui vont suivre vont respectivement situer cette discipline dans son contexte philosophique et mathématique.

4.1 Aspects philosophiques

La philosophie est basée sur une réflexion à propos des objets, des êtres et de toutes choses de l'univers. Parmi les interrogations traditionnelles des philosophes celles portant sur le statut ontologique (métaphysique) des objets se répartissent pour Dummet[25] en trois questions :

- Les objets de type x existent-ils ?
- Les objets de type x existent-ils indépendamment de nous ?
- Les objets de type x ont-ils des propriétés bien déterminées ?

Si dans la plupart des cas ces questions s'entendent pour des objets du monde réel il en est aussi à propos de ceux plus abstraits. Ces interrogations ont jalonné l'histoire de la philosophie et celles qui traitent de l'existence des objets mathématiques ont reçu au fil des siècles des réponses aussi divergentes que controversées.

Si les Grecs répondaient par l'affirmative à la première question, ils étaient par contre convaincus que les objets étudiés étaient extérieurs et préexistants à l'homme. Ce statut particulier rendait leur utilisation dans les autres sciences impossible et même sacrilège. Galilée, postule le contraire et proclame un monde dont la nature est mathématique. Hermite, un mathématicien affirme que les nombres et les fonctions de l'analyse « existent en dehors de nous avec le même caractère de nécessité que les choses de la réalité objective, […] nous les rencontrons ou les découvrons, et les étudions, comme les physiciens, les chimistes et les zoologistes ». Pour Hardi, le nombre 317 « est un nombre premier non parce que nous pensons ainsi ou parce que nos esprits ont une forme plutôt qu'une autre, mais parce que c'est ainsi, parce que la réalité mathématique est construite de cette manière ».

Ces deux approches contraires sont à l'origine de la démarche intuitionniste. En effet, si on donne aux objets mathématiques des propriétés que nous voulons leur voir revêtir ou si on les considère extérieur au monde réel et donc parfait, il ne peut y avoir aucun doute quant à leurs caractéristiques. Ces dernières posées en postulat deviennent par voie de conséquence des instruments au service d'une vérité désirée où aucune controverse ne peut voir le jour. Cette position n'est pas celle des intuitionnistes. Pour ces derniers, les notions de vérité et de signification ont un caractère prioritaire dans toute démarche où on introduit un objet mathématique dans une proposition.

Cette notion de vérité prend toute sa signification lorsque nous sommes confrontés à un exposé de la forme disjonctive. En logique classique on emploi très souvent des expressions de la forme « P ou Q » sans avoir parfois, aucune idée des valeurs de P et de Q pris séparément. De plus, lorsque cette expression est de la forme « P ou non P »[26], l'intuitionniste rétorque qu'il est, à priori, dans l'incapacité d'associer une valeur de vérité à P et à non P. Cette conception est exprimée de la manière suivante : « […] pour pouvoir dire que « P » est vrai (ou faux), il faut que j'aie déterminé à quelles conditions je nomme « P » vrai, et c'est de cette manière que je détermine le sens de la phrase » [27]. Or, il faut en toute circonstance pouvoir se placer dans ces conditions pour pouvoir déterminer la valeur de vérité d'une proposition. Il arrive pourtant qu'on ne puisse pas le faire et dans ce cas la proposition étudiée devient indécidable[28]. Toute utilisation de celle-ci devient en quelque sorte frauduleuse car elle introduit un doute dans le résultat final. Si la logique est une discipline dont le rôle est d'atteindre avec rigueur un résultat par le raisonnement, alors peut-on se contenter de bâtir une hypothèse sans avoir au préalable réuni toutes les conditions de sa vérité. Ainsi, il existe une notation constructiviste pour exprimer que :

---

[25] Dummet in *Truth* et *The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic*, in : *Truth and Others Enigmas*
[26] Une tautologie aux vues de la logique classique s'appuyant sur l'axiome du tiers-exclu.
[27] Wittgenstein : *Tractatus logico-philosophicus* (1921)
[28] Ibid. 20.

$P \overline{\vee} Q$ signifie qu'il existe un procédé régulier qui permet soit d'affirmer P soit d'affirmer Q.

De la même manière, lorsqu'on est en présence d'un exposé conditionnel de la forme « Si P alors Q », il n'est pas toujours possible de se placer dans les conditions permettant d'asserter P. Pour l'intuitionniste, il n'est donc pas possible de déduire des conséquences de la proposition. De plus, s'il est impossible d'asserter P, est ce que nous pouvons en déduire une valeur pour Q et a fortiori est-il pertinent de se poser cette question alors même qu'il n'existe pas pour le moment les conditions permettant de se placer dans les conditions préalables à l'étude de Q ?

Dans la logique classique, il existe deux méthodes pour prouver une proposition. Soit, on apporte une preuve de sa vérité soit, on tente de prouver que le contraire de la proposition est faux (c'est la preuve par l'absurde). Du point de vue intuitionniste, cette dernière méthode est incomplète. En effet, comme dans la forme disjonctive, prouver qu'une proposition n'est pas fausse n'apporte en aucune façon une méthode permettant de réunir les conditions d'observation de la vérité de celle-ci. Dans le cas de proposition indécidable « P » n'est pas plus vrai que « non P ». Dans ce cas, « non(non P) » nous exprime simplement que le contraire d'une proposition indécidable est elle-même indécidable. Les constructivistes réfutent donc le principe de non-contradiction et son corollaire la preuve par l'absurde.

D'autre part, dans la logique des prédicats, on utilise les quantificateurs $\exists$ pour exprimer qu' « il existe » et $\forall$ pour exprimer « pour tout ». Concernant l'existence d'un objet, l'intuitionniste ne peut affirmer l'existence d'un objet sans avoir au préalable trouvé une méthode permettant de l'exhiber. En logique classique on déduit « il existe X tel que P(X) est vrai » de « pour tout X non P(X) est faux ». or, s'il n'a pas de moyen régulier d'asserter « P(X) » ou « non P(X) » l'intuitionniste refusera d'effectuer cette transformation. Il existe une notation constructiviste pour exprimer que :

$\overline{\exists}\, x\, P(x)$ signifie qu'il existe un procédé régulier qui permet de construire un élément vérifiant la propriété P.

On le voit, cette notion de point de vue est le préalable à tout travail de déduction. Les opposants à la cause constructiviste, à ce propos, objectent souvent que chercher ces conditions n'est pas primordial[29]. Ils affirment d'autre part que les vues intuitionnistes ne sont qu'une restriction du raisonnement sans aucun motif pertinent.

Pour les constructivistes, anti-réalistes et anti-platonistes, les mathématiques sont construites par l'homme. Elles ne sont pas déjà là, attendant en quelque sorte que nous les découvrions[30]. Elles n'adopteraient pas comme critère de vérité l'intuition particulière de chaque mathématicien, singularité historique, liée à une métaphysique particulière destinée à disparaître et qui n'exprimerait que l'angoisse de quelques mathématiciens. Ils montrent de la sorte que la conception constructive ne mutile pas la mathématique classique, mais au contraire l'enrichit[31].

4.2 Aspects mathématiques

Le cadre historique posé, les conceptions philosophiques clarifiées, nous pouvons maintenant nous intéresser aux conséquences de la pensée intuitionniste dans les mathématiques. J'ai exprimé précédemment que la théorie des ensembles de Cantor comportait des paradoxes sans en détailler la teneur. Or, ces contradictions, à l'origine de la division de la communauté mathématique, permettent de comprendre le point de vue intuitionniste.

Il existe globalement deux manières de décrire un ensemble :

- En extension, c'est à dire en énumérant tous les objets qui le composent. Cette écriture n'est concevable que si le nombre d'éléments est connu. Par exemple les membres qui composent mon foyer sont :

  Foyer = {Agnès, Amélie, Aurélien, Franck}

---

[29] Exhiber l'objet n'est pas l'objet de leurs discours
[30] Ibid. 25.
[31] Roger Apéry in *Penser les mathématique, séminaire de philosophie et mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure* (J. Dieudonné, M. Loi, R. Thom). Editions du Seuil, pp. 58-72.

- En compréhension, à savoir, en énonçant la ou les propriétés des éléments, propriété qui permet de construire cet ensemble soit avec une règle d'ajout soit en appliquant une règle sur les éléments d'un autre ensemble. Pour le même exemple :

Foyer = {x Є {Humains} / x habite sous mon toit}

Apparaît ici une difficulté qui n'est pas évidente à comprendre : celle de l'accès aux éléments d'un ensemble. En effet, les éléments d'un ensemble écrit en extension sont parfaitement connus grâce à la liste dont nous avons déjà parlé ; En revanche, une propriété quelconque peut donner naissance à un ensemble dont nous n'avons pas la moindre idée de la forme des éléments.

Peut-on avoir accès à eux dans de telles conditions ? Les constructivistes réfutent l'axiome de choix[32]. Pour eux, s'il n'existe pas un algorithme permettant avec un nombre fini d'opération d'exhiber un élément de l'ensemble considéré c'est que cet objet, sans intuition, n'est pas utilisable. Ce cas se présente avec les ensembles non-dénombrables tel que celui des réels.

Cantor avait à ce propos, définit deux infinis distincts :

- Celui des suites ordonnées dit dénombrable (l'ensemble des entiers naturels par exemple) .
- Celui des réels qui a la puissance du continu.

Les constructivistes préfèrent parler d'infini potentiel, en devenir. Ils peuvent atteindre des nombres aussi grands qu'ils le souhaitent mais jamais les atteindre tous. Ils s'opposent ainsi à l'infini actuel cantorien consistant à considérer globalement une collection infinie d'objets.

Un autre paradoxe de la théorie des ensemble est sans doute celui concernant l'ensemble des ensembles. Cantor, lui-même, la découvre en 1899 et s'appui sur un de ses théorèmes.

Théorème de Cantor : Si $\mathcal{P}$(E) désigne l'ensemble des parties d'un ensemble E, alors :

Card E < Card $\mathcal{P}$(E)

Or, l'ensemble de tous les ensembles ne peut être un ensemble. Car, si un tel ensemble X existe, $\mathcal{P}$(X) est un élément de X et par suite :

Card $\mathcal{P}$(X) < Card X

Cette démonstration va à l'encontre du principe de contradiction (non (P et non P)). En effet, le cardinal d'un ensemble ne peur être à la fois plus grand et plus petit que les parties qui le compose. Cela est du à la confusion entre l'ensemble et ses éléments, entre le contenant et le contenu. C'est le paradoxe du barbier résumé ainsi :

Si dans un village, un barbier déclare raser la barbe de tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes, le barbier se rase-t-il lui-même ? Le barbier (vu en tant que fonction) le peut si le barbier (vu ici en tant qu'homme) ne le fait pas. Or, nous avons ici à faire à la même personne. La langue utilisée pour exprimer cette proposition n'est pas assez précise.

Cette relation entre objets de nature différente permet d'aborder la notion d'interprétation d'une sémantique liée à un système formel. Du point de vue intuitionniste, on ne peut résoudre ces ambiguïtés liées au langage sans avoir recours à un langage placé à l'extérieur et susceptible d'en rendre compte. La métalinguistique[33], ici appelée métalogique ou métamathématique à permis entre autre, grâce aux travaux de Robinson de s'affranchir de certaines ambiguïtés.

---

[32] Ibid. 17.
[33] Langage de description d'un autre langage.

5 Conclusion

Au début du XX^{ème} siècle la communauté mathématique s'est divisée en trois mouvements.

Le logicisme a tenté de reconstruire les fondements des mathématiques avec les axiomes de la logique en se basant sur la théorie des ensembles.

Le formalisme, quant à lui à tenté cette refondation sans la théorie de Cantor.

Enfin, en plaçant la logique sous les mathématiques (dont elle est une émanation) et en rejetant à la fois la notion d'infini actuel et le principe du tiers-exclu, les intuitionnistes ont apporté une autre vision des mathématiques en donnant aux objets étudiés une place de choix.

Cette « doctrine qui privilégie un mode de pensée direct et immédiat censé atteindre une réalité individuée et actuellement donnée » et qui, « à l'intuition oppose le raisonnement », place le raisonnement sous l'intuition :

> « La théorie du raisonnement correct ou logique reçoit une valeur de principe de certitude ; elle est subordonnée à l'intuition, principe d'être et instance de contrôle. »[34]

En effet, la logique mathématique, créée à partir de constatation sur l'ensemble des entiers naturels, a été étendue à tous les nombres. Puis, certains mathématiciens ont voulu en faire l'outil primordial de refondation de leur science en oubliant qu'ils faisaient ainsi une boucle.

Le point de vue de chacune de ces communautés est bien sur défendable. Personne ne détient la vérité absolue et ce débat continuera longtemps. En ce qui concerne leurs approches respectives et les résultats qui en découlent, nous pouvons seulement constater que, abstraction faite des luttes d'intérêt visant à obtenir le statut de « vrai » mathématique, chacune d'entre-elles a contribué au formidables progrès de cette science au XX^{ème} siècle.

Gageons que cette émulation continuera à entretenir la recherche mathématique dans l'avenir.

[34] Ibid. 17, P5.